SOLUCIONES COMENTADAS

Ejercicio 1. (1 punto)

Se trazan 18 segmentos en el plano con las siguientes condiciones:

a) Cada segmento corta a la menos a otros 6 y como mucho a 10
b) El número de puntos de intersección es múltiplo de 25.

Se pide hallar el número de puntos de intersección.

Solución:
Interpretamos el problema en términos de grafos, tal y como se indicó en la realización del examen. Para ello necesitamos definir un grafo G = (V, A), cuáles son los vértices y cómo se define la adyacencia entre vértices, es decir, cuáles son las aristas.
En el enunciado se habla de 18 segmentos en el plano y nos piden los puntos de intersección. ¿Pueden ser éstos los vértices de G? ¿Qué serían las aristas en este caso? No encontramos sentido a esta interpretación.
Consideremos que los segmentos son los vértices del grafo G. Dos vértices (segmentos) serán adyacentes si los segmentos correspondientes se cortan. Así cada arista de G corresponde a un punto de intersección.
Deberíamos tener cuidado si hubiera tres o más segmentos cortándose cortan en un mismo punto. Supondremos que esto no sucede, lo que equivale a calcular el máximo número posible de puntos de intersección de los 18 segmentos.

Por tanto las condiciones del enunciado para el grafo G son: $|V| = n = 18$, $6 \le d(v) \le 10 \ \ \forall v \in V$
Y nos piden calcular el número de aristas q del grafo G.
Utilizamos la fórmula de Euler de los grados, $\displaystyle\sum_{v \in V} d(v) = 2q$
Así $2q = \Sigma\, d(v) \le \Sigma\, 10 = 10 \cdot 18 = 180$ luego $q \le 90$
$2q = \Sigma\, d(v) \ge \Sigma\, 6 = 6 \cdot 18 = 108$ luego $q \ge 54$
Como q es múltiplo de 75, la única solución válida es $q = 75$.
El número máximo de puntos de intersección de 18 segmentos en el plano es 75 (según las condiciones exigidas en el enunciado)

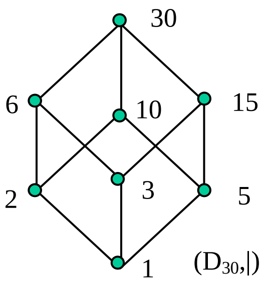
Ejercicio 2. (1,5 puntos)

Dibuja el diagrama de Hasse de $(D_{30}, |) \times (D_6,|)$ ordenado con el orden lexicográfico. Dado el subconjunto A = {(2,1), (3,1), (3,2), (6,2), (15,3), (30,3)}, halla, si existen, los elementos maximales y minimales, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto A.

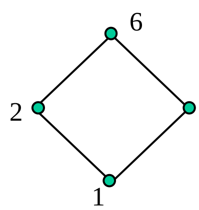
Solución:

$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

En primer lugar dibujamos los diagramas de Hasse de $(D_{30}, |)$ y $(D_6, |)$

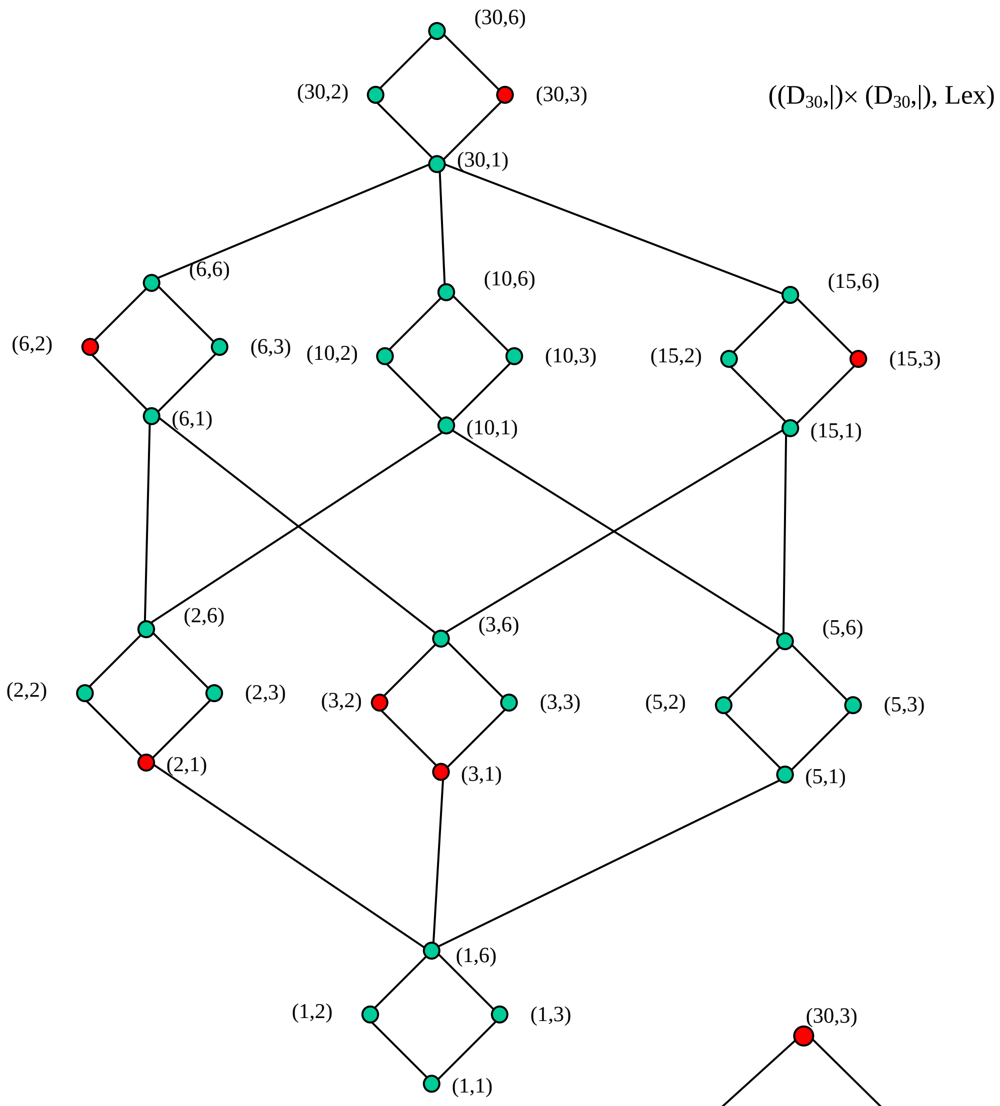


$(D_{30},|)$

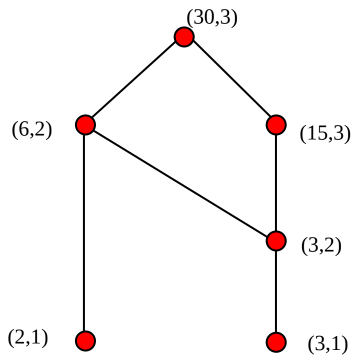


$(D_6,|)$

Y ahora el diagrama de Hasse de $(D_{30}, |) \times (D_6,|)$ respecto del orden lexicográfico. Basta colocar, adecuadamente, una copia del segundo diagrama en cada vértice del primero.



Dibujamos ahora el diagrama de Hasse del conjunto ordenado (A,|)



Empecemos buscando minimales y maximales, que SÓLO debemos buscar dentro de A.
Elementos maximales: (30,3) porque no hay ningún elemento de A posterior a él
Elementos minimales: {(2,1), (3,1)}, porque no hay ningún elemento de A anterior lexicográficamente a ninguno de ellos
Como hay más de un minimal NO existe mínimo. Y como sólo hay un maximal, éste es el máximo.

Ahora buscamos cotas superiores e inferiores de A. Hay que mirar en todo $(D_{30}, |) \times (D_6,|)$
Cotas superiores de A: {(30,3), (30,6)} Como (30,3) es el máximo de A, también es el supremo de A
Cotas inferiores de A: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,6)}
Ínfimo de A es (1,6) porque es la mayor, en el orden lexicográfico, de las cotas inferiores

Ejercicio 3. (1 punto)
Demuestra, por inducción, que para todo número natural n, se cumple que $3^n + 7^n - 2$ es múltiplo de 8

Solución:
Sigamos los pasos de una demostración por inducción:

Primer paso. Comprobamos que el resultado es cierto para n=1
$3^1 + 7^1 - 2 = 3 + 7 - 2 = 8$, que efectivamente es un múltiplo de 8

Segundo paso. Suponiendo que el resultado es cierto para k, debemos probar que el resultado es cierto para $k + 1$

La hipótesis de inducción (HI) es que el resultado es cierto para k, es decir que $3^k + 7^k - 2$ es múltiplo de 8.
Debemos probar que $3^{k+1} + 7^{k+1} - 2$ es múltiplo de 8. Operamos:

$$3^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 3\cdot 3^k + 7\cdot 7^k - 2 = 3\cdot 3^k + 3\cdot 7^k + 4\cdot 7^k - 2 = 3\cdot 3^k + 3\cdot 7^k - 3\cdot 2 + 4\cdot 7^k + 4 =$$
$$= 3\cdot(3^k + 7^k - 2) + 4\cdot 7^k + 4 = 3\cdot\underbrace{(3^k + 7^k - 2)}_{\text{Múltiplo de 8 por HI}} + 4(7^k + 1)$$

Múltiplo de 2 por ser suma de impares

Por tanto, cada sumando es múltiplo de 8 y la expresión es múltiplo de 8 para k + 1

Así hemos conseguido demostrar que si el resultado es cierto para k, también lo es para k + 1.
Por el principio de inducción el resultado es cierto para todo número natural

Ejercicio 4. (1,5 puntos)
Teorema de la división entera. Enunciado y demostración.

Había avisado que en el examen habría preguntas teóricas, por lo que es inadmisible que muchos alumnos ni hayan enunciado correctamente el teorema. ¿Cuántos teoremas importantes se han explicado en estos meses de clase?

Ejercicio 5. (1 punto)
Halla todos los puntos del plano de coordenadas enteras no negativas que estén sobre la recta de ecuación $87x - 51y = 15$ ¿Cuál es el más cercano al origen?

Solución:
Se debe resolver la ecuación diofántica $87x - 51y = 15$ y luego elegir las soluciones no negativas.

En primer lugar se comprueba que la ecuación tiene solución porque $\text{mcd}(87, 51) = 3 \mid 15$
Simplificamos la ecuación, dividiendo por el mcd, resultando $29x - 17y = 5$
donde $\text{mcd}(29, 17) = 1$
Ahora se debe encontrar una solución particular de $29x - 17y = 5$
El procedimiento habitual es encontrar primero una solución de $29x - 17y = 1$, utilizando el algoritmo de Euclides extendido

$29 = 17\cdot 1 + 12$
$17 = 12\cdot 1 + 5$
$12 = 5\cdot 2 + 2$
$5 = 2\cdot 2 + 1$

$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2(12 - 5\cdot 2) = 5\cdot 5 + 12(-2) = 5(17 - 12\cdot 1) + 12(-2) =$
$= 5\cdot 17 + 12(-7) = 5\cdot 17 + (-7)(29 - 17\cdot 1) = 12\cdot 17 + (-7)\cdot 29$
Así pues una solución de $29x - 17y = 1$ es $x = -7$, $y = -12$

Y una solución de $29x - 17y = 5$ es $x = -35$, $y = -60$

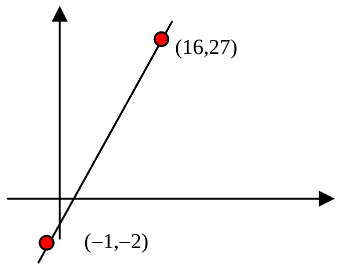
Todas las soluciones enteras de la ecuación $29x - 17y = 5$ son:

$$\begin{cases} x = -35 + 17t \\ y = -60 + 29t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{Z} \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \begin{cases} x = -1 + 17k \\ y = -2 + 29k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

Aquí tenemos todos los puntos de coordenadas enteras de la recta dada. Como nos piden los puntos de coordenadas no negativas debemos averiguar para qué valores de t se tiene $x, y \geq 0$

$-1 + 17k \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$
$-2 + 29k \geq 0 \Rightarrow k \geq 1$

Luego los puntos de la recta de coordenadas enteras no negativas son $\{(-1 + 17k, -2 + 29k) / k \geq 1\}$
Y de ellos el más próximo al origen es el (16, 27)



Ejercicio 6. (1 punto)
Responde a las siguientes cuestiones:
a) Demuestra que si $x < n$ y $\text{mcd}(x, n) = 1$, entonces $\text{mcd}(n, n - x) = 1$
b) Expresa $\Phi(2n)$ en función de $\Phi(n)$

Solución:
(a) Presentamos dos demostraciones diferentes.

Primera demostración:
Si $\text{mcd}(x, n) = 1$ entonces existen a, b enteros tales que $ax + bn = 1$
Operamos en esta expresión hasta conseguir una combinación entera de n y $n - x$ que también valga 1

$1 = ax + bn = ax + bn - an + an = (-a)(n - x) + (b - a)n$

Por tanto, $\text{mcd}(n - x, n) = 1$

Segunda demostración:
Sea d un divisor positivo común de n y $n - x$. Demostraremos que $d = 1$
Si $d | n$ y $d | n - x$, entonces $d | n - (n - x)$ es decir, $d | x$
Por tanto d es un divisor común de x y de n. Como $\text{mcd}(n,x) = 1$, resulta que $d = 1$

(b) Distingamos dos casos según que n sea par o impar

1. **Si n es impar entonces $\Phi(2n) = \Phi(n)$**

Si n es impar entonces $\text{mcd}(2,n)=1$, luego $\Phi(2n) = \Phi(2)\,\Phi(n) = \Phi(n)$

2. **Si n es par, entonces $\Phi(2n) = 2\Phi(n)$**

Si n es par será de la forma $n = 2^s \cdot t$ con t impar
Así tendremos: $\Phi(n) = \Phi(2^s)\,\Phi(t) = (2^s - 2^{s-1})\,\Phi(t)$
$\Phi(2n) = \Phi(2^{s+1})\,\Phi(t) = (2^{s+1} - 2^s)\,\Phi(t)$
Luego, $\Phi(2n) = 2\Phi(n)$

Ejercicio 7. (1,5 puntos)
Resuelve la siguiente ecuación:

$$3^{218} x \equiv 5 \pmod{266}$$

Solución:
Aplicamos el teorema de Euler $\boxed{\text{Si } \text{mcd}(a,m) = 1 \text{ entonces } a^{\Phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}}$

Como $266 = 2\cdot 7\cdot 19$, resulta $\Phi(266) = \Phi(2)\Phi(7)\Phi(19) = 6\cdot 18 = 108$, luego $3^{108} \equiv 1 \pmod{266}$

$218 = 2\cdot 108 + 2$, luego $3^{218} = (3^{108})^2 \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 3^2 \pmod{266}$

La ecuación original ha quedado reducida a $9x \equiv 5 \pmod{266}$
Para terminar deberíamos calcular el inverso de 9 mod 266, pero podemos evitar los cálculos del observando que $5 \equiv -261 \pmod{266}$
Así la ecuación es $9x \equiv -261 \pmod{266}$ y aquí se puede simplificar por 9
$9x \equiv -9\cdot 29 \pmod{266}$, es decir $x \equiv -29 \pmod{266}$, o bien

$$\boxed{x \equiv 237 \pmod{266}}$$

Ejercicio 8. (1,5 puntos)
El sistema planetario de la estrella Beta consta de tres planetas: Lirón, Maneto y Nurbia. La nave espacial Alfa23 dispone de los siguientes datos astronómicos: Lirón se alineará con la nave dentro de 12 meses sidéreos y tiene período de de 15 meses, Maneto lo hará dentro de 3 meses y su período es de 14 meses y, finalmente, Nurbia se alineará dentro de 9 meses y su período es de 11 meses. ¿Cuándo se producirá la próxima conjunción planetaria?

Solución:

Sea x el número de meses que faltan para la próxima conjunción planetaria con la nave Alfa23. La información astronómica sobre Lirón nos dice que, en términos de congruencias, se tiene que

$$x \equiv 12 \pmod{15}$$

porque las conjunciones de Lirón y Alfa se producen dentro de 12, 12 + 15, 12 + 15·2, ... meses.

Análogamente podemos interpretar los datos astronómicos de Maneto y Nurbia y x será una solución del sistema de congruencias siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 12 \pmod{15} \\ x \equiv 3 \pmod{14} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

Como los módulos son coprimos dos a dos el sistema tiene solución y ésta es única módulo $15\cdot 14\cdot 11$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{-1} = 14 \cdot 11 = 154 \\ t_2^{-1} = 15 \cdot 11 = 165 \\ t_3^{-1} = 15 \cdot 14 = 210 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} t_1^{-1} \equiv 4 \pmod{15} \\ t_2^{-1} \equiv 9 \pmod{14} \\ t_3^{-1} \equiv 1 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

$x = 12 \cdot 154\cdot 4 + 3\cdot 165\cdot 9 + 9\cdot 210\cdot 1 \equiv 2187 \pmod{2310}$

Por tanto, la próxima conjunción planetaria se producirá dentro de 2187 meses sidéreos.